Over

van der Hoek, Rienk

INLEIDING.

In de verzekeringwiskunde neemt behalve de leer der interestrekening de studie betreffende de samenstelling der sterftetafel een belangrijke plaats in. Aan de hand van nauwkeurige statistische gegevens wordt voor iederen leeftijd (x) vastgesteld de kans (p_x) om gedurende de volgende tijdseenheid, waarvoor in de praktijk een jaar wordt genomen, in leven te blijven benevens de kans (q_x) om gedurende dat tijdselement te sterven; zoodra één van deze beide kansen bekend is, volgt de andere uit de eenvoudige betrekking:

$$p_x + q_x = 1$$

Wanneer voor een bepaalden leeftijd x er $l(x)$ personen in observatie worden genomen, waarvan na verloop van één tijdseenheid nog $l(x+1)$ in leven zijn, dan is

$$p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} \text{ en}$$

$$q_x = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} = \frac{d(x)}{l(x)}.$$

Als voor iederen leeftijd de sterftekans bekend is, kan met behulp van de betrekking $l(x+1) = p_x l(x)$ een rij van getallen worden samengesteld, die aangeeft, hoeveel personen uit een willekeurig gekozen aantal nuljarigen na iedere tijdseenheid nog in leven zullen zijn gebleven.

De aldus verkregen rij van getallen, empirische sterftetafel genoemd, geeft dus voor leeftijden in geheele jaren uitgedrukt, een beeld van de afsterving der menschheid. Voor tusschenliggende leeftijden kan dan de een of ander meer of minder nauwkeurige interpolatiemethode dienst doen.

Van den beginne af, dat de mathematicus zich heeft bezig gehouden met de constructie van de sterftetafel, heeft deze methode hem minder bevredigd en heeft hij gezocht naar een of ander analytische uitdrukking, die voor leeftijden in geheele jaren de getallen uit de empirische sterftetafel zou omvatten en die dan meteen een oplossing zou geven voor tusschenliggende waarden.

Het gevolg hiervan is geweest, dat thans een groot aantal van dergelijke formules is opgesteld[1]), waarvan sommige onbruikbaar zijn, omdat ze niet voldoende bij de statistische getallen aansluiten, andere omdat ze tengevolge van een groot aantal constanten zeer ingewikkeld en dientengevolge voor praktische doeleinden minder bruikbaar worden. Desniettegenstaande bestaan er een paar sterfteformules, die niet alleen aan de theorie der verzekeringswiskunde hun diensten hebben bewezen, maar bovendien voor de praktijk van het grootste belang zijn. Voordat we tot de behandeling van deze formules overgaan, is noodig het begrip sterfte-intensiteit te definieeren.

De kans X, dat een thans x-jarige overlijdt gedurende het tijdsinterval t en $t + \Delta t$, is gelijk aan de kans, dat deze persoon over t jaar nog in leven is, ${}_tp_x$, verminderd met de kans om over $t + \Delta t$ jaar nog in leven te zijn, dus:

$$X = {}_tp_x - {}_{t+\Delta t}p_x$$

$$X = -\left({}_{t+\Delta t}p_x - {}_tp_x\right).$$

Door Δt tot nul te laten naderen, wordt de kans voor een x-jarige om juist over t jaar te sterven gelijk aan het tegengestelde van de differentiaal van de functie ${}_tp_x$ met betrekking tot t,

$$\lim_{\Delta t = 0} X = - {}_tp'_x \, dt.$$

Uit de betrekking:

$${}_tp_x = \frac{l(x+t)}{l(x)}$$

volgt:

$$- {}_tp'_x \, dt = - \frac{l'(x+t)}{l(x)} \, dt.$$

Onder de sterfte-intensiteit μ_x voor een x-jarige wordt nu verstaan de waarde der grootheid $- {}_tp'_x$ voor het geval $t = 0$ m. a. w.

$$\mu_x = - {}_{t=0}p'_x = - \frac{l'(x)}{l(x)}.$$

---

[1]) J. du Saar: Over sterfteformules en Lijfrenten (Dissertatie 1917).

Zooals zal blijken speelt deze functie, die ook sterftekracht of oogenblikkelijke sterftekans wordt genoemd, in de verzekeringswiskunde een belangrijke rol.

Gompertz[1]) is nu omstreeks 1820 bij de samenstelling van zijn sterfteformule uitgegaan van de veronderstelling, dat de verandering van sterfte-intensiteit gedurende een oneindig klein tijdsinterval een constant deel bedraagt van die sterfte-intensiteit zelf, welke hypothese dus aanleiding geeft tot de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\mu_x}{dx} = a\mu_x$$

$$\frac{\mu'_x}{\mu_x} = a$$

$$\log \mu_x = ax + \beta$$

$$\mu_x = e^{ax+\beta}$$

of ook

$$\mu_x = bc^x,$$

waarbij $b = e^\beta$ en $c = e^a$.

Volgens deze opvatting van Gompertz vormen de sterfte-intensiteiten voor verschillende leeftijden met gelijke tijdsintervallen een meetkundige reeks. Door integratie wordt uit de formule der sterfte-intensiteit afgeleid:

$$-\frac{l'(x)}{l(x)} = bc^x$$

$$\log l(x) = -\int bc^x dx$$

$$\log l(x) = -\frac{b}{\log c} c^x + C$$

$$\log l(x) = c^x \log g + \log k$$

waarbij $\log g = -\frac{b}{\log c}$ en $\log k = C$

of

$$l(x) = kg^{c^x}.$$

In deze gedaante is de sterfteformule van Gompertz algemeen bekend, naar aanleiding waarvan later door Makeham werd opgemerkt, dat dan ook de logarithmen der kansen voor een

[1]) B. Gompertz: A sketch of an Analysis and Notation applicable to the estimation of the value of Life contigencies. (Philosophical Transactions II, 1820, blz. 214).

x-jarige om na steeds gelijke tijdsintervallen nog in leven te zijn, een meetkundige reeks met reden c^t zouden moeten vormen, immers:

$$\log {}_t p_x = \log \frac{g^{c^{x+t}}}{g^{c^x}} = \log g^{c^x(c^t-1)} = c^x(c^t-1)\log g.$$

$$\log {}_t p_{x+t} = \log \frac{g^{c^{x+2t}}}{g^{c^{x+t}}} = \log g^{c^{x+t}(c^t-1)} = c^{x+t}(c^t-1)\log g.$$

$$\log {}_t p_{x+2t} = \log \frac{g^{c^{x+3t}}}{g^{c^{x+2t}}} = \log g^{c^{x+2t}(c^t-1)} = c^{x+2t}(c^t-1)\log g.$$

Bij de toepassing van deze eigenschap op de empirische sterftetafels verkreeg Makeham afwijkingen, die hem aanleiding gaven een wijziging aan te brengen in de Gompertz'sche formule; hij gaat bij de samenstelling van zijn formule uit van de gedachte, dat de sterfte behalve van den leeftijd ook afhangt van een factor, die in geen verband staat met den leeftijd. Makeham voegt derhalve aan de waarde voor de sterfte-intensiteit volgens Gompertz nog een constante toe en verkrijgt dan[1]):

$$\mu_x = a + bc^x$$

$$\log l(x) = -\int (a + bc^x)\,dx$$

$$\log l(x) = -ax - \frac{b}{\log c}c^x + C.$$

$$\log l(x) = x\log s + c^x \log g + \log k,$$

waarbij $\log s = -a$; $\log g = -\dfrac{b}{\log c}$ en $\log k = C$.

Hieruit volgt dan de belangrijke eerste formule van Makeham

$$l(x) = ks^x g^{c^x},$$

waardoor dus de verschillen der sterfte-intensiteiten bij gelijke leeftijdsintervallen een meetkundige reeks vormen. De formule

---

[1]) W. M. Makeham: On the law of mortality and the construction of annuity-tables. J. I. A. VIII 1860, blz. 301.

W. M. Makeham: On the principles to be observed in the Construction of Mortality-tables. J. I. A. XII 1866, bl. 305.

W. M. Makeham: On the law of mortality. J. I. A. XIII 1867, bl. 325.

van Gompertz is dus te beschouwen als een bijzonder geval van Makeham's formule n.l. $s = 1$.

Makeham heeft later nog een uitbreiding aan zijn eerste sterfteformule gegeven [1]), door de reeks der tweede verschillen der sterfte-intensiteiten als een meetkundige reeks te beschouwen; de formule voor μ_x zal derhalve nog een term bevatten, die lineair van den leeftijd afhangt.

$$\mu_x = a + a'x + bc^x,$$

waaruit na integratie wordt afgeleid:

$$l(x) = ks^x w^{x^2} g^{c^x}.$$

Onder een groot aantal sterfteformules spelen die van Gompertz en Makeham een belangrijke rol en wel in het bijzonder de eerste formule van Makeham, niet alleen wegens de vrij nauwkeurige aansluiting van deze functie aan vele empirische sterftetafels of deelen daarvan, maar tevens tengevolge van de belangrijke eigenschappen, die in de volgende hoofdstukken nader zullen worden behandeld.

De sterfteformules in het algemeen vinden een terrein van toepassing bij de analytische methode om statistische tafels af te ronden; de eerste Makeham'sche formule neemt ook hier weer een bijzondere plaats in; verschillende Fransche en Engelsche tafels zijn volgens deze formule afgerond.

Zoodra de sterftetafel gereed is en de keus van rentevoet is bepaald, begint het technische werk voor den verzekeringswiskundige, die de waarden der lijfrenten voor de verschillende leeftijden bepaalt, waaruit dan de gegevens voor talrijke andere verzekeringsvormen kunnen worden afgeleid.

De contante waarde van de eenheid, te betalen aan een thans x-jarige over een jaar, mits hij dan nog in leven is, bedraagt:

$$vp_x = v\,\frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{v^{x+1}l(x+1)}{v^x l(x)} = \frac{D(x+1)}{D(x)},$$

---

1) W. M. Makeham: On the further development of Gompertz's Law J. I. A. XXVIII blz. 152, 191.

Woolhouse: On Makeham's Extensions of Gompertz's Law J. I. A. XXVIII blz. 481.

waarbij v den discontofactor voorstelt. Hieruit volgt, dat een jaarlijksche praenumerando lijfrente ten behoeve van een x-jarige wordt bepaald door:

$$a_x = 1 + \frac{D(x+1)}{D(x)} + \frac{D(x+2)}{D(x)} + \ldots\ldots$$

$$a_x = \frac{\Sigma D(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{D(x)}.$$

Ter verkrijging van de waarden voor de een of ander praktische verzekeringsvorm is steeds een eerste vereischte de commutatiekolommen $D(x)$ en $N(x)$ samen te stellen [1]).

Evenals bij verzekeringen op één leven de waarden der lijfrenten voor de verschillende leeftijden van belang zijn, is dit voor verzekeringsvormen, die afhankelijk zijn van meer dan één leven het geval met de verbindingsrenten, waaronder wordt verstaan voor b.v. twee levens met leeftijden x en y de waarde eener lijfrente a_{xy}, jaarlijks betaalbaar zoolang beiden in leven zijn. Zooals hieronder zal blijken uit een voorbeeld, zijn de formules, die noodig zijn voor verzekeringen op meer hoofden in wezen volkomen gelijk aan die op één leven; alleen eischt het practische cijferwerk een veel omvangrijker arbeid.

Wanneer de kans, dat een paar individuen met leeftijden x en y over een jaar nog in leven is, wordt voorgesteld door $p_x \times p_y = p_{xy}$, dan zal de contante waarde der eenheid, betaalbaar over een jaar, mits beiden nog in leven zijn, bedragen:

$$v \times p_{xy} = v \times \frac{l(x+1)}{l(x)} \times \frac{l(y+1)}{l(y)} = \frac{D(x+1) l(y+1)}{D(x)\ l(y)} = \frac{D(x+1, y+1)}{D(x, y)}.$$

De contante waarde der praenumerando verbindingsrente is derhalve:

$$a_{xy} = \frac{\Sigma D(x, y)}{D(x, y)} = \frac{N(x, y)}{D(x, y)}.$$

Onder $D(x, y)$ wordt verstaan $v^x\, l(x)\, l(y)$, waarbij steeds zal worden

---

[1]) Vergelijk de studieboeken:

J. Schouten: Grondbeginselen der Verzekeringswiskunde.

C. L. Landré: Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung.

H. Broggi: Versicherungsmathematik.

George King: Institute of Actuaries' Textbook. Part. II.

Henri Galbrun: Assurances sur la vie.

aangenomen, dat het jongste der beide levens naar den leeftijd nul wordt gedisconteerd, waaruit volgt, dat bij gelijke sterftetafel voor beide indivuduen $D(x, y) = D(y, x)$.

Het komt er dus in de eerste plaats weer op aan de commutatiekolommen $D(x,y)$ en $N(x,y)$ te bepalen. Bij een volledig stel verbindingsrenten voor de leeftijden 0 tot 100 is tengevolge van verschillende leeftijdscombinaties noodig voor ieder der kolommen een tienduizendtal getallen te berekenen, aangenomen dat beide levens aan verschillende sterftetafels voldoen. Wanneer voor beide levens dezelfde sterftetafel is gekozen, waaruit volgt, dat $D(x,y) = D(y,x)$, kan met de helft worden volstaan.

Hieruit blijkt voldoende, dat het voorbereidende werk bij verzekeringen op twee levens zeer omvangrijk is. Zooveel te meer zal dit het geval zijn bij die vormen van verzekering, welke afhangen van meer dan twee levens. Praktisch is het vrijwel onmogelijk voor de in gebruik zijnde sterftetafels commutatiekolommen voor alle leeftijdscombinaties bij meer dan twee levens samen te stellen. Het feit, dat dit soort verzekeringen in de praktijk vrij zelden voorkomt, gecombineerd met bovenstaande moeilijkheden, heeft aanleiding gegeven om bij voorkomende gelegenheden te zoeken naar voldoend nauwkeurige benaderingsmethoden.

In de volgende hoofdstukken zal worden nagegaan, op welke wijze en onder welke voorwaarden sommige methoden kunnen worden toegepast, waaronder die, welke bekend staat onder den naam: „Law of Uniform Seniority", meer in het bijzonder zal worden behandeld. Het zal blijken, dat de sterftetafels, die gehoorzamen aan de eerste formule van Makeham daarbij een belangrijke plaats innemen.